

УДК 514.18

С.Ф. ПИЛИПАКА, І.Ю. ГРИЩЕНКО

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Т.А. КРЕСАН

Ніжинський агротехнічний інститут НУБіП України

**МОДЕЛЮВАННЯ СМУГ РОЗГОРТНИХ ПОВЕРХОНЬ, ДОТИЧНИХ ДО
ПОВЕРХНІ КУЛІ**

Розроблено алгоритм побудови смуги торса, яка є дотичною до кулі одиничного радіуса. Вихідною умовою є аналітична функція одиничного вектора змінного напрямку. Траєкторія його кінця задає сферичну криву, яка є напрямною для торса і лінією дотику його до поверхні кулі. Виведено параметричні рівняння торса та його розгортки. Розглянуто конкретний приклад. За знайденими рівняннями побудовано смугу торса, дотичну до кулі одиничного радіуса. Чисельними методами побудовано його розгортку.

Ключові слова: куля одиничного радіуса, сферична крива, дотичний торс, смуга, розгортка.

С.Ф. ПИЛИПАКА, И.Ю. ГРИЩЕНКО

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

Т.А. КРЕСАН

Нежинский агротехнический институт НУБиП Украины

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛОС РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ,
КАСАТЕЛЬНЫХ К ПОВЕРХНОСТИ ШАРА**

Разработан алгоритм построения полосы торса, которая является касательной к шару единичного радиуса. Исходным условием является аналитическая функция единичного вектора переменного направления. Траектория его конца задает сферическую кривую, которая является направляющей для торса и линией касания его к поверхности шара. Выведены параметрические уравнения торса и его развертки. Рассмотрен конкретный пример. По найденным уравнениям построена полоса торса, касательная к шару единичного радиуса. Численными методами построена его развертка.

Ключевые слова: шар единичного радиуса, сферическая кривая, касательный торс, полоса, развертка.

S.F. PYLYPAKA, I.Yu. GRISCHENKO

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

T.A. KRESAN

IS NULES of Ukraine "Nizhyn Agrotechnical Institute"

**MODELLING OF BANDS OF UNROLLED SURFACES, TANGENTIAL TO THE
SPHERE SURFACE**

The problem of constructing a torso strip, which is tangent to a non-disjoint surface along a curve on it, arises when the approximating the non-dispersed surface by expansion bays.

An algorithm for constructing a torso strip, which is tangent to a sphere of unit radius, is developed. The initial condition is the analytic function of the unit vector of the variable direction. The trajectory of its end defines a spherical curve, which is a guide for the torso and a line of contact with the surface of the ball. The parametric equations of the torso and its sweep

are derived. A concrete example is considered. By the equations found, a torso strip tangent to a sphere of unit radius is constructed. By numerical methods, its scanning is constructed.

The aim of the paper is to create an algorithm for constructing a torso strip tangential to the surface of a ball along a given curve on it. The problem is solved analytically using differential geometry of surfaces, numerical methods of integration.

When the independent variable of the vector of unit radius changes, its end will describe a spherical curve. Any vector (for example, points of a space curve) can be reduced to a single vector. The form of the spherical curve depends on the functions describing the unit vector. This curve can be taken as the line of contact of the torso to the ball. The straight line generatrix of the torso will pass through this line. The work shows the directing vector of a rectilinear generator. For this, the unit vector is differentiated by an independent variable and reduced to the unit vector. The vector product of the initial and obtained unit vectors will give the guiding vector of the torso generator. All rectilinear torso generators cross the spherical curve at a right angle, that is, the torso obtained is related to the orthogonal grid of coordinate lines that are curvature lines. Examples of construction of explored disjoints are given.

The practical significance of the problem lies in the fact that it allows us to approximate the ball by strips of torsos along a given line on it and obtain the sweeps of these bands.

Keywords: sphere of unit radius, spherical curve, tangential torso, strip, sweep.

Постановка проблеми

Задача побудови смуги торса, дотичної до нерозгортної поверхні вздовж заданої на ній кривої, виникає при апроксимації нерозгортної поверхні відсіками розгортних [1]. В умовах малосерійного виробництва та при виконанні ремонтних і експериментальних робіт відсік нерозгортної поверхні можна замінити відповідним відсіком торса, однак при цьому потрібно брати таку лінію на нерозгортній поверхні, вздовж якої дотичний торс буде найбільш щільно прилягати до поверхні. Виготовити потрібний відсік апроксимуючого торса можна простим згинанням плоскої заготовки, контури якої можна знайти точно. Для виготовлення відсіків із нерозгортної поверхні потрібно мати спеціальну оснастку, виготовлення якої для малосерійного виробництва недоцільне.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В праці [2] показано, що кривою на нерозгортній поверхні, вздовж якої доцільно робити апроксимацію смугою торса, є лінія кривини. При апроксимації нерозгортної поверхні смугою торса вздовж лінії кривини прямолінійні твірні торса будуть перпендикулярними до спільної лінії дотику. Лінія дотику буде також лінією кривини і для торса. Сфера є поверхнею, для якої будь-яка крива на ній є лінією кривини, тому будь-який дотичний до неї торс теж буде віднесений до ліній кривини, оскільки його опис буде здійснюватися на основі спільної кривої дотику.

Типовим прикладом апроксимації нерозгортної поверхні розгортною є полиця плуга. В праці [3] наведена методика розрахунку ступеня відхилення полиці плуга із лінійчатої нерозгортної поверхні від розгортної за сферичним відображенням. На основі сферичного відображення можна знайти відсік торса, який найбільш точно апроксимує полицю із нерозгортної поверхні. Подібними питаннями займалися і інші автори [4, 5]. Апроксимація інших нерозгортних поверхонь торсами розглянута в працях [6, 7].

Мета дослідження

Створити алгоритм побудови смуги торса, дотичного до поверхні кулі вздовж заданої кривої на ній.

Викладення основного матеріалу дослідження

Всяку просторову криву, задану параметричними рівняннями, можна розглядати, як траєкторію кінця радіус-вектора змінної довжини і напрямку. Якщо такий вектор привести до одиничного, то його кінець опише криву на поверхні кулі одиничного

радіуса. Задамо в кінці одиничного вектора \vec{N} перпендикулярну до нього площину (рис. 1, а). Ця площина буде дотичною до поверхні кулі одиничного радіуса. При зростанні незалежної змінної кінець вектора рухатиметься по сферичній кривій і утворюватиме однопараметричну множину дотичних до кулі площин. Обвідною поверхнею цієї множини буде розгортна поверхня (торс), яка буде дотична до кулі вздовж сферичної кривої.

Щоб побудувати окрему площину, що належить вказаній множині, скористаємося схемою, наведеною на рис. 1, б. З кінця вектора \vec{N} , який є для площини нормальним, проведемо дві прямі, паралельні векторам \vec{N}_1 і \vec{N}_2 , які складають прямий кут із вектором \vec{N} . Якщо вектори \vec{N}_1 і \vec{N}_2 теж будуть між собою перпендикулярні, то всі три вектори \vec{N} , \vec{N}_1 і \vec{N}_2 утворять між собою прямі кути, тобто трійка векторів буде взаємно перпендикулярною. В такому випадку наочне зображення окремої площини можна буде показувати у вигляді квадратів або прямокутників (рис. 1, а).

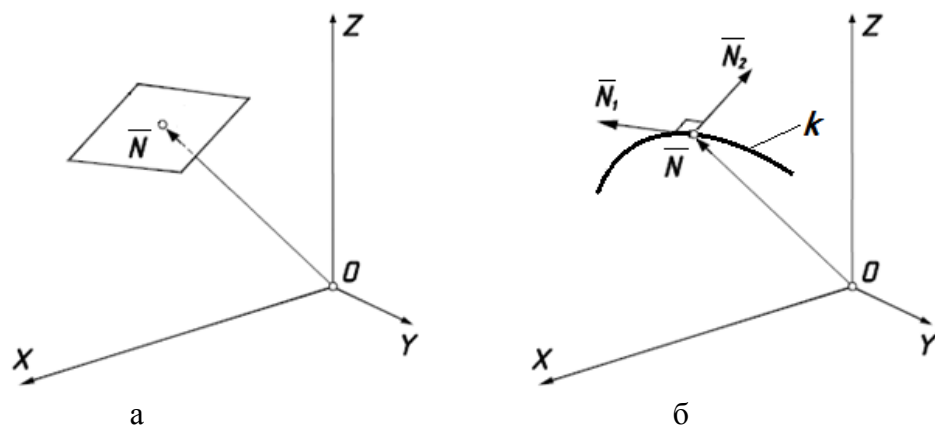


Рис. 1. Схема до побудови площини, що належить до однопараметричної множини:
а) відсік площини в кінці вектора \vec{N} , перпендикулярний до нього;
б) до утворення відсіку площини за допомогою трьох взаємно перпендикулярних векторів.

Побудувати трійку взаємно перпендикулярних векторів можна за допомогою одиничного вектора, проекції якого залежать від змінної t , тобто $l=l(t)$, $m=m(t)$, $n=n(t)$. Як відомо, диференціювання одиничного вектора по змінній t дає вектор, перпендикулярний заданому. Наприклад, якщо вектор \vec{N} (рис. 1, б) одиничний і залежний від t , то його диференціюванням отримаємо перпендикулярний вектор \vec{N}_1 , дотичний до сферичної кривої k . Вектор \vec{N}_2 можна отримати в результаті векторного добутку векторів \vec{N} і \vec{N}_1 . Всі три вектори будуть взаємно перпендикулярними.

Параметричні рівняння однопараметричної множини площин, які побудовані за схемою, наведеною на рис. 1, б, запишуться:

$$\begin{aligned} X &= l + u l_1 + v l_2; \\ Y &= m + u m_1 + v m_2; \\ Z &= n + u n_1 + v n_2, \end{aligned} \quad (1)$$

де u , v – незалежні змінні;

$l=l(t)$, $m=m(t)$, $n=n(t)$; $l_1=l_1(t)$, $m_1=m_1(t)$, $n_1=n_1(t)$; $l_2=l_2(t)$, $m_2=m_2(t)$, $n_2=n_2(t)$ – проекції векторів \vec{N} , \vec{N}_1 і \vec{N}_2 на осі координат.

При $t = \text{const}$ за рівняннями (1) ми отримаємо конкретну площину. Якщо межі зміни параметрів u і v однакові, то буде окреслено відсік площини у вигляді квадрата. Збільшуючи параметр t на певну величину, отримаємо однопараметричну множину квадратів. Це зручно зробити у циклі.

Оскільки вектор $N \{l, m, n\}$ одиничний, то всі площини, побудовані за рівняннями (1) будуть дотикатися до сфери одиничного радіуса, а обвідна поверхня множини площин буде дотичною до сфери. Лінією дотику буде сферична крива, побудована за рівняннями радіус-вектора N : $l=l(t)$, $m=m(t)$, $n=n(t)$.

Розглянемо приклад. Візьмемо відомі параметричні рівняння гвинтової лінії, розташованої на циліндрі одиничного радіуса:

$$x = \cos t; \quad y = \sin t; \quad z = ht, \quad (2)$$

де h – крок гвинтової лінії – стала величина.

Приведемо радіус-вектор точки гвинтової лінії до одиничного і отримаємо:

$$l = \frac{\cos t}{\sqrt{1+h^2t^2}}; \quad m = \frac{\sin t}{\sqrt{1+h^2t^2}}; \quad n = \frac{ht}{\sqrt{1+h^2t^2}}. \quad (3)$$

Проекції одиничного вектора N (3) є по суті параметричними рівняннями сферичної кривої. Знайдемо їх похідні і отриманий вектор теж приведемо до одиничного. Отримані вирази є проекціями вектора N_1 :

$$l' = l_1 = -\frac{\sin t + h^2 t (\cos t + t \sin t)}{\sqrt{(1+h^2t^2)}[1+h^2(1+t^2)]}; \quad m' = m_1 = \frac{\cos t - h^2 t (\sin t - t \cos t)}{\sqrt{(1+h^2t^2)}[1+h^2(1+t^2)]};$$

$$n' = n_1 = \frac{h}{\sqrt{(1+h^2t^2)}[1+h^2(1+t^2)]}. \quad (4)$$

Проекції вектора N_2 знаходимо за правилами векторного множення векторів (3) і (4):

$$l_2 = \frac{h(\sin t - t \cos t)}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}; \quad m_2 = -\frac{h(\cos t + t \sin t)}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}; \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}. \quad (5)$$

На рис. 2, а за рівняннями (1) побудовано однопараметричну множину площин, розташування і орієнтація яких визначається векторами (3), (4) і (5). Одиничний вектор (3) задає сферичну криву, вздовж якої площини дотикаються до сфери одиничного радіуса.

Знайдемо рівняння торса, якщо однопараметрична множина площин задана рівняннями у формі (1). Характеристика (твірна торса) є лінією перетину двох суміжних нескінченно близьких площин множини. Знаходячись одночасно в двох площинах, твірна перпендикулярна до нормальних векторів цих площин. Отже, напрямний вектор твірної можна визначити, як векторний добуток двох суміжних нормалей:

$$\vec{I} = \vec{N} \times (\vec{N} + d\vec{N}) = \vec{N} \times d\vec{N}. \quad (6)$$

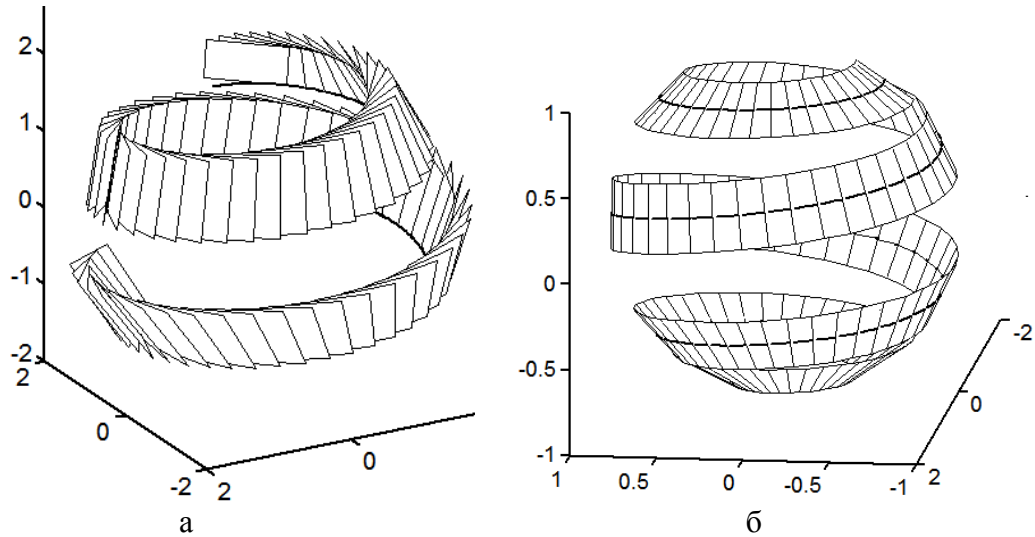


Рис. 2. До побудови смуги торса, дотичного до сферичної кривої, заданої одиничним вектором (3) при $h=0,15$:

- а) однопараметрична множина площин, дотичних до кулі вздовж заданої кривої;
- б) смуга торса із лінією дотику до кулі.

Напрямок векторного добутку не зміниться, якщо вектор $d\bar{N}$ замінити паралельним йому вектором $d\bar{N}/dt$:

$$\bar{i} = \bar{N} \times \frac{d\bar{N}}{dt}. \quad (7)$$

Із знайдених векторів виходить, що в ролі вектора \bar{N}_1 виступає вектор $d\bar{N}/dt$, а в ролі вектора \bar{N}_2 – вектор \bar{i} (7). Твірні торса перетинатимуть напрямну криву під прямим кутом, тобто сітка координатних ліній торса буде ортогональною.

Запишемо параметричні рівняння торса, як множини його прямолінійних твірних, що виходять із кінця вектора \bar{N} , заданого проекціями (3) паралельно до вектора \bar{N}_2 , заданого проекціями (5):

$$\begin{aligned} X &= l + ul_2 = \frac{\cos t}{\sqrt{1+h^2t^2}} + u \frac{h(\sin t - t \cos t)}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}; \\ Y &= m + um_2 = \frac{\sin t}{\sqrt{1+h^2t^2}} - u \frac{h(\cos t + t \sin t)}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}; \\ Z &= n + un_2 = \frac{ht}{\sqrt{1+h^2t^2}} + u \frac{1}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}, \end{aligned} \quad (8)$$

де u – довжина прямолінійної твірної торса.

На рис. 2, б за рівняннями (8) побудовано смугу торса, дотичного до кулі одиничного радіуса вздовж кривої (3) при зміні параметра u в межах $u=-0,2 \dots 0,2$.

Побудуємо розгортку смуги торса. На першому етапі потрібно знайти напрямну криву у розгортці, а потім через кожну її точку потрібно провести прямолінійну твірну під

таким же кутом до неї, як і на поверхні, тобто перпендикулярно. Для побудови напрямної кривої на розгортці скористаємося формулами, наведеними в праці [8]:

$$x_p = \int \left(\frac{ds}{dt} \right) \cos \alpha dt; \quad y_p = \int \left(\frac{ds}{dt} \right) \sin \alpha dt, \quad (9)$$

де ds/dt – похідна довжини дуги сферичної напрямної кривої;
 α – закономірність зміни кута $\alpha = \alpha(t)$ між прямолінійними твірними торса.

Обидві закономірності $s = s(t)$ і $\alpha = \alpha(t)$ є спільними для торса і його розгортки, оскільки не змінюються при згинанні торса.

Знайдемо похідну довжини дуги сферичної кривої (3):

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2} = \frac{\sqrt{1 + h^2(1 + t^2)}}{1 + h^2 t^2}. \quad (10)$$

Відомо, що кут між двома векторами чисельно рівний довжині дуги кола одиничного радіуса, яка розташована між цими векторами. Тому закономірність зростання кута $\alpha = \alpha(t)$ між прямолінійними твірними будемо знаходити як закономірність зростання довжини дуги на сфері одиничного радіуса, яку опише одиничний вектор N_2 , заданий проекціями (5). Щоб знайти довжину цієї дуги, спочатку продиференціюємо вектор (5) по змінній t :

$$\begin{aligned} l'_2 &= \frac{ht(1 + h^2 t^2)^{3/2} [\sin t + h^2 t(t \sin t + \cos t)]}{[(1 + h^2 t^2)(1 + h^2(1 + t^2))]^{3/2}}, \\ m'_2 &= -\frac{ht(1 + h^2 t^2)^{3/2} [\cos t + h^2 t(t \cos t - \sin t)]}{[(1 + h^2 t^2)(1 + h^2(1 + t^2))]^{3/2}}, \\ n'_2 &= \frac{ht(1 + h^2 t^2)^{3/2}}{[(1 + h^2 t^2)(1 + h^2(1 + t^2))]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Довжину дуги знаходимо інтегруванням кореня квадратного із суми квадратів виразів (11). Оскільки довжина дуги чисельно рівна кутові α , запишемо:

$$\alpha = \int \sqrt{l'_2{}^2 + m'_2{}^2 + n'_2{}^2} dt = \int \frac{ht\sqrt{1 + h^2 t^2}}{1 + h^2(1 + t^2)} dt = \frac{\sqrt{1 + h^2 t^2}}{h} - \text{Arcctg} \frac{h}{\sqrt{1 + h^2 t^2}}. \quad (12)$$

Підстановкою (10) і (12) в (9) отримуємо параметричні рівняння напрямної кривої торса в розгортці. Враховуючи те, що прямолінійні твірні торса перпендикулярні напрямній кривій, можна остаточно записати параметричні рівняння дотичного торса в розгортці:

$$X_p = \int \frac{\sqrt{1 + h^2(1 + t^2)}}{1 + h^2 t^2} \cos \alpha dt - u \sin \alpha; \quad Y_p = \int \frac{\sqrt{1 + h^2(1 + t^2)}}{1 + h^2 t^2} \sin \alpha dt + u \cos \alpha, \quad (13)$$

де u – довжина прямолінійної твірної торса на розгортці. Вираз для кута α наведено в (12).

На рис. 3 за рівняннями (13) чисельними методами побудовано розгортку смуги, яка є дотичною до кулі одиничного радіуса. Ця смуга зображена на рис. 2,б.

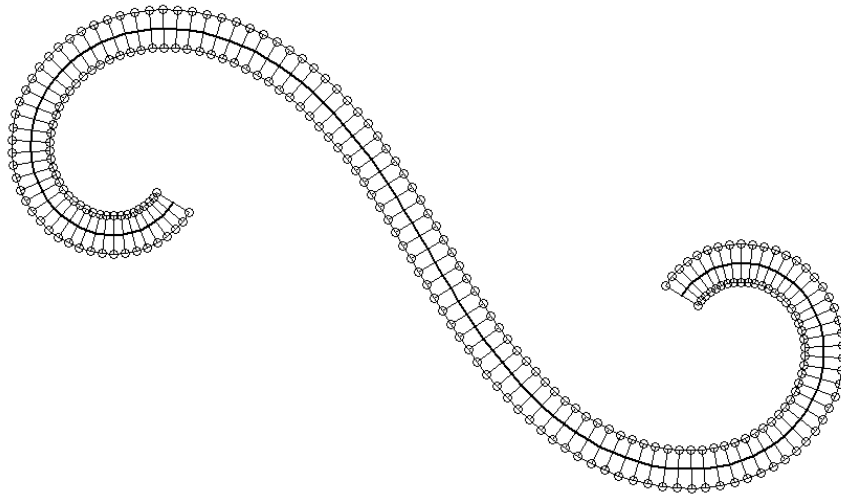


Рис. 3. Розгортка смуги торса, показаної на рис. 2,б.

Можна показати, що перша квадратична форма торса (8) і його розгортки (13) збігаються між собою. Це свідчить про те, що розгортка торса знайдена правильно.

Висновки

Будь-який радіус-вектор (наприклад, точок просторової кривої) можна привести до одиничного. При зміні незалежного параметра в певних межах його кінець опише криву на поверхні кулі. Виразів проєкцій цього вектора достатньо для побудови смуги торса, дотичного до кулі вздовж цієї кривої. Щоб скласти параметричні рівняння торса за розробленим алгоритмом потрібно знайти другий вектор диференціюванням одиничного вектора по незалежній змінній і привести його до одиничного, потім знайти третій вектор, як результат векторного добутку першого вектора на другий. Для побудови розгортки додатково потрібно продиференціювати третій вектор по незалежній змінній. В загальному випадку розгортку потрібно будувати чисельними методами.

Список використаної літератури

1. Пилипака С.Ф. Апроксимація гвинтового коноїда смугами торсів вздовж просторових кривих на його поверхні / С.Ф. Пилипака, Л.С. Бойко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2011. – Вип. 28. – С. 32-38.
2. Пилипака С.Ф. Апроксимація гвинтового коноїда смугами торсів вздовж ліній кривини на його поверхні / С.Ф. Пилипака, Л.С. Бойко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Т. 52. – С. 31-39.
3. Гячев Л.В. Теория лемешно-отвальной поверхности / Л.В. Гячев. – Зерноград, 1961. – 317 с.
4. Кардашевская Ю.Г. О возможности использования торсов в качестве лемешно-отвальных поверхностей / Ю.Г. Кардашевская // Труды Московского института радиотехники, электроники и автоматики. – 1969. – Вып. 44. – С. 50-55.

5. Обухова В.С. Об аппроксимации лемешно-отвальных поверхностей / В.С. Обухова, А.Л. Мартиросов // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1976. – № 21. – С. 145-150.
6. Ковалев С.Н. Аппроксимация каналовой поверхности непрерывной лентой торсов и ее развертка / С.Н. Ковалев, Л.С. Панасюк // Реферат. информ. о законченных научно-исслед. работах в вузах Украинской ССР. – К.: Вища школа, 1977. – Вып. 1. – С. 13.
7. Рыжов Н.Н. Аппроксимация сложных поверхностей развертывающимися поверхностями / Н.Н. Рыжов // Труды ВЗЭИ. Начертательная геометрия. – М., 1953. – Вып. 13. – 95 с.
8. Обухова В.С. Конструирование поверхностей одинакового ската как огибающей однопараметрического семейства круговых конусов / В.С. Обухова, С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1988. – Вып. 46. – С. 13-18.

References

1. Pylypaka, S. F., Boiko, L. S. Aproksymatsiia hvyntovoho konoida smuhamy torsiv vzdovzh prostorovykh kryvykh na yoho poverkhni. Heometrychne ta kompiuterne modeliuvannia. Kharkivskiy derzhavnyi universytet kharchuvannia ta torhivli. Kharkiv. **28**, 32-38. (2011)
2. Pylypaka, S. F., Boiko, L. S. Aproksymatsiia hvyntovoho konoida smuhamy torsiv vzdovzh linii kryvyny na yoho poverkhni. Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu. TDATU. Melitopol. **4**. Prykl. heometriia ta inzh. Hrafika, 52, 31-39. (2012)
3. Gyachev, L. V. Teoriya lemeshno-otvalnoy poverhnosti. Zernograd. (1961)
4. Kardashevskaya, Yu. G. O vozmozhnosti ispolzovaniya torsov v kachestve lemeshno-otvalnyih poverhnostey. Trudyi Moskovskogo instituta radiotekhniki, elektroniki i avtomatiki. **44**, 50-55. (1969)
5. Obuhova, V. S., Martirosov, A. L. Ob approksimatsii lemeshno-otvalnyih poverhnostey. Prikl. geometriya i inzh. grafika. Budivelnik. Kyiv. **21**, 145-150. (1976)
6. Kovalev, S. N., Panasyuk, L. S. Approksimatsiya kanalovoy poverhnosti nepreryivnoy lentoy torsov i ee razvertka. Referat. inform. o zakonchennyih nauchno-issled. rabotah v vuzah Ukrainской SSR. Vischa shkola. Kyiv. (1977)
7. Ryizhov, N. N. Approksimatsiya slozhnyih poverhnostey razvertyivayuschimisya poverhnostyami. Trudyi VZEI. Nachertatelnaya geometriya. M.oscow. 13. (1953)
8. Obuhova, V. S., Pilipaka, S. F. Konstruirovanie poverhnostey odinakovogo skata kak ogibayushey odnoparametricheskogo semeystva krugovyih konusov. Prikl. geometriya i inzh. grafika. Budivelnik. Kyiv. **46**, 13-18. (1988)